四庫全書

子部

歷算全書卷五十二

宣城梅文鼎撰

三角法舉要卷三

內容外切

三角測量之用在邊與角而其內容外切亦所當明故次于算例之後

內容有二曰本形曰他形

一三角求積

積謂之冪亦謂之面乃本形所有

一三角容員

一三角容方

以上皆形内所容之他形

外切惟一

一三角形外切之員

三角求積第一術

底與高相乘折半見積

內分二支

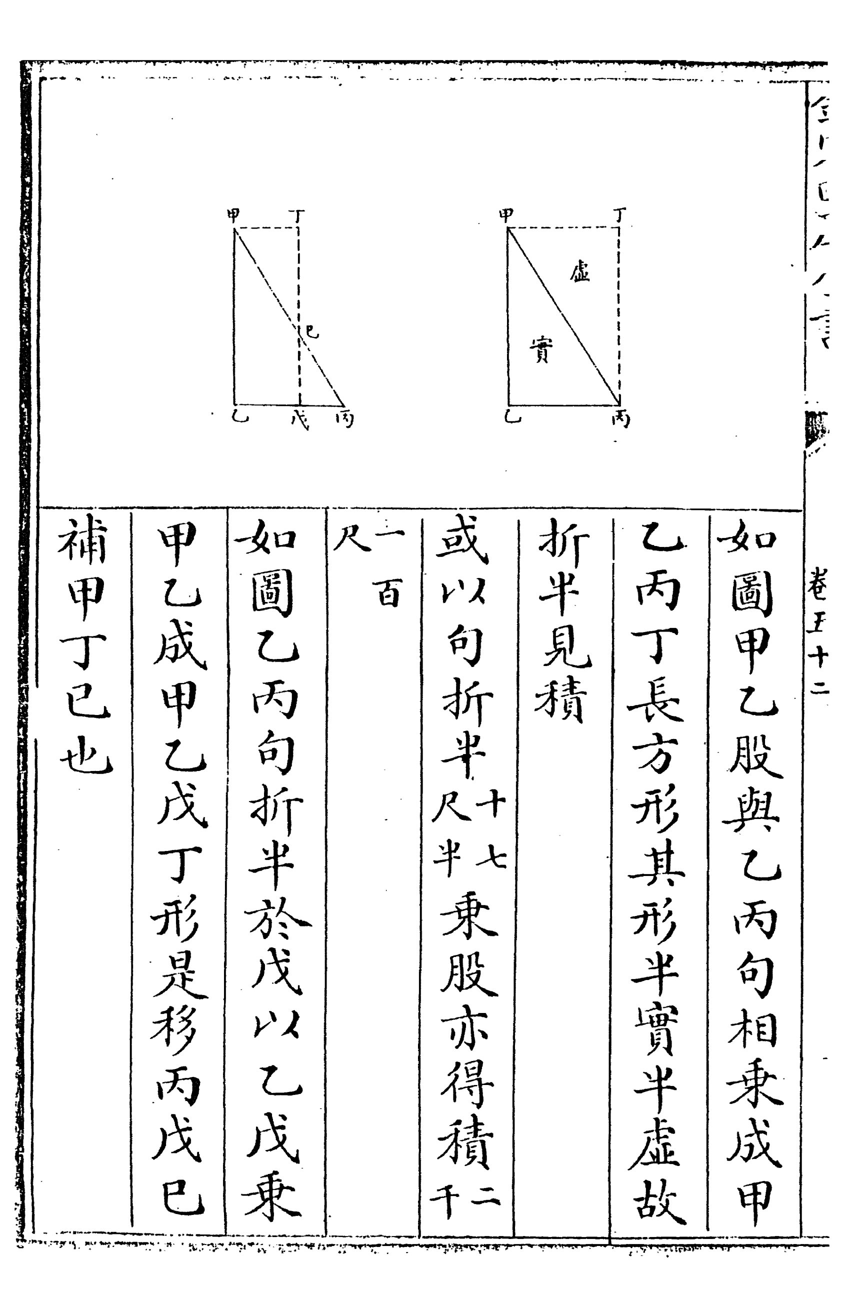
一句股形即以句股為底為高

一鋭角鈍角形任以一邊為底而求其垂線為高

假如句股形甲乙股一百二十尺乙丙句三十五尺求積

術以甲乙股乙丙句相乘四千二百尺折半得積

凡求得句股形積二千一百尺



如圖甲乙股與乙丙句相乘成甲乙丙丁長方形其形半實半虛故折半見積

或以句折半十七尺半乘股亦得積二千一百尺

如圖乙丙句折半於戊以乙戊乘甲乙成甲乙戊丁形是移丙戊巳補甲丁巳也

或以股折半六十尺乘句亦得積二千一百尺

如圖甲乙股折半於巳以巳乙乘乙丙成巳乙丙丁形是移甲巳戊補戊丁丙也

右句股形以句為底以股為高若以股為底則句又為高可互用也

句股形有立有平若平地句股以句為濶以股為長

其理無二

論曰凡求平積皆謂之冪其形如網目又似窻櫺之空皆以横直相交如十字亦如機杼之有經緯而成布帛故句股是其正法何也句股者方形斜剖之半也折半則成正剖之半方形矣其他鋭角鈍角或有直無横有横無直必以法求之使成句股然後可算故句股者三角法所依以立也

假如銳角形甲乙邊二百三十二尺甲丙邊三百四十尺乙丙邊四百六十八尺求積

術先求垂線用銳角第三術任以乙丙邊為底以甲丙甲乙為兩弦兩弦之較數一百零八尺總數五百七十二尺相乘六萬一千七百七十六尺為實以乙丙底為法除之得數一百三十二尺轉減乙丙餘數三百三十六尺半之得乙丁一百六十八尺依句股法以乙丁自乘二萬八千二百二十四尺與甲

乙自乘五萬三千八百二十四尺相減餘數二萬五千六百尺平方開之得甲丁垂線一百六十尺以甲丁垂線折半乘乙丙底得積

凡求得鋭角形積三萬七千四百四十尺

如圖移辛補壬移庚補癸則成長方形即垂線折半乘底之積

右鋭角形任以乙丙邉為底取垂線求積若改用甲乙或甲丙邉為底則所得垂線不同而得積無異故可以任用為底

假如鈍角形甲乙邊五十八步甲丙邊八十五步乙丙邊三十三步求積

術求垂線立於形外用鈍角第三

術以乙丙為底甲乙甲丙為兩弦

總數一百四十三步較數二十七步相乘三千八百六十一步為實乙丙底為法除之得數一百一十七步內減乙丙餘數八十四步折半四十二步為乙丁即乙丙引長邊依句股法乙丁自乘一千七百六十四步甲乙自乘三千三百六十四步相減餘數一千六百步平方開之得甲丁

四十步為形外垂線以乙丙底折半十六步半乘之得積

凡求得鈍角形積六百六十步

如圖甲乙丙鈍角形移戊補庚移庚巳補壬癸又移壬子補辛成辛癸丑長方即乙丙底折半乘中長甲丁之積

右鈍角形以乙丙為底故從甲角作垂線若以甲乙為底則自丙角作垂線亦立形外而垂線不同然以

之求積並同若以甲丙為底從乙角作垂線則在形內如鈍角矣其垂線必又不同而其得積無有不同故亦可任用一邊為底

凡用垂線之高乘底見積必其線上指天頂底線之横下應地平兩線相交正如十字故其所乘之冪積皆成小平方可以虚實相補而求其積數鈍角形引長底線以作垂線立於形外則兩線相遇亦成十字正方之角矣

總論曰三角形作垂線於內則分兩句股鈍角形作垂線於外則補成句股皆句股法也

三角求積第二術

以中垂線乘半周得積謂之以量代算

假如鈍角形乙丙邊五十八步甲乙邊一百一十七步甲丙邊八十五步

求積

丙
心
乙
庚
甲

術平分甲乙兩角各作線會于心從心作十字垂線至乙甲邊如心庚即中垂線也乃量取中垂線心庚得數一十八步

合計三邊而半之一百三十步為半周以半周乘中垂線得積

凡求得鈍角形積二千三百四十步

又術如前取中垂線心庚為濶半周為長如乙癸及丁壬別作一長方形如乙壬丁癸即與甲乙丙鈍角形等積

解曰凡自形心作垂線至各邊皆等故中垂線乘半周為一切有法之形所公用方員及五等面六等面至十等面以上並同故以中垂線為濶半周為長其所作長方形即與三角形等積

又解曰中垂線至邊皆十字正方角即分各邊成句股形以乘半周得積即句股相乘折半之理

附分角術 有甲角欲平分之

術以甲角為心作虛半規截角旁兩線得辛壬二點乃自辛自壬各用為心作弧線相遇于癸作癸甲線即分此角為兩平分

三角求心術

如上分角術於甲角平分之于乙角又平分之兩平分之線必相遇成一點此一點即三角形之心

解曰試再於丙角如上法分之則亦必相遇於原點

三角求積第三術

以三較連乘又乘半總開方見積

假如鈍角形甲乙邊一百一十六尺甲丙邊一百七十尺乙丙邊二百三十四尺求積

術合計三邊而半之二百六十尺為半總以與甲乙邊相減得較一百四十四尺與甲丙邊相減得較九十尺與乙丙邊相減得較二十六尺三較連乘以兩較相乘得數又以餘一較

乘之得數三十三萬六千又以半總較之得數八千七百六十也

九百六十尺

萬零九千六百尺 平方開之得積

凡求得鈍角形積九千三百六十尺

若係鋭角同法

解曰此亦中垂線乘半周之理但所得為冪乘冪之數故開方見積詳或問

三角容員第一術

以弦與句股求容員徑此術惟句股形有之凡句股相併為和以和與弦併為弦和和以和與弦相減為弦和較

假如甲乙丙句股形甲丙句二十步乙甲股二十一步乙丙弦二十九步求容員徑

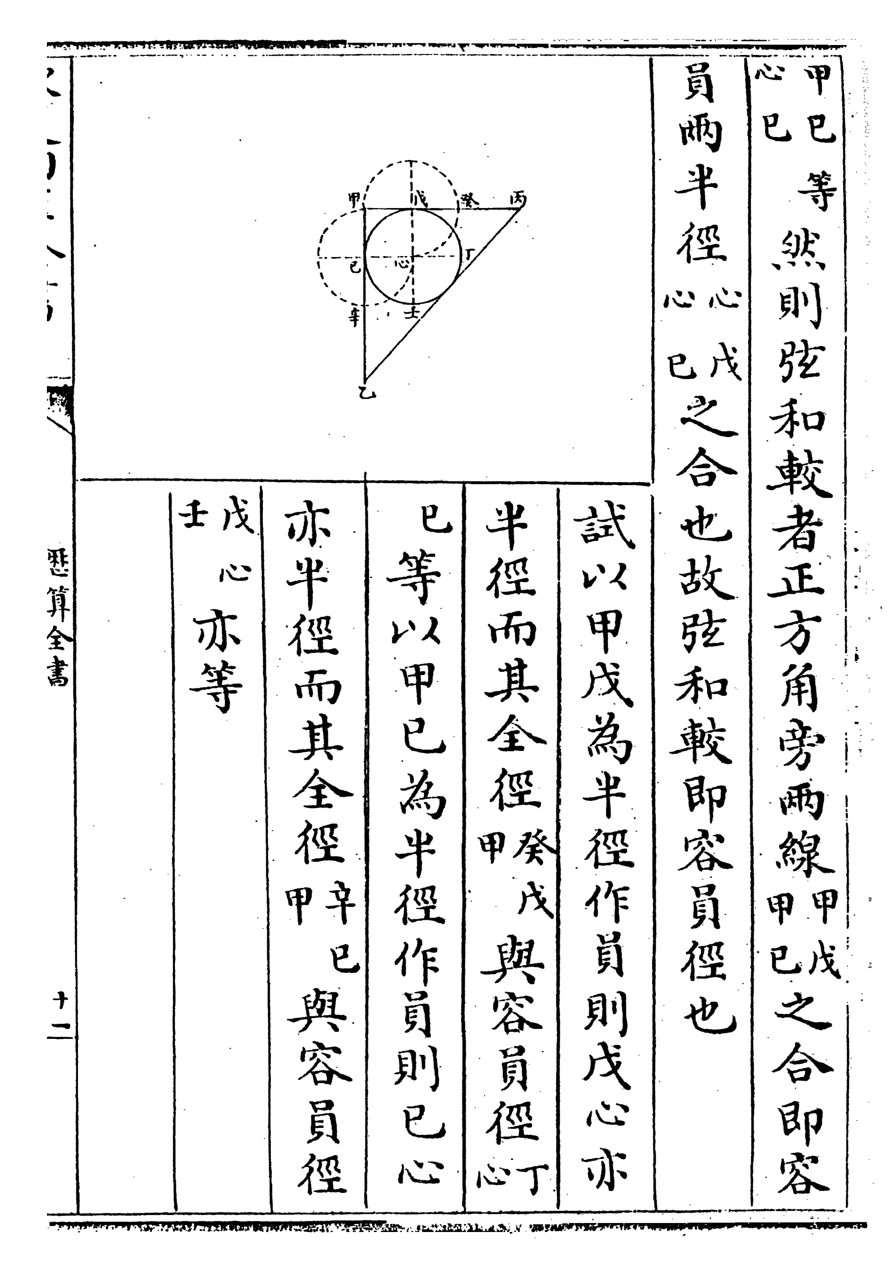
術以句股和四十一步與弦相減得數為容員徑

凡求得内容員徑一十二步

解曰此以弦和較為容員徑

如圖從容員心作半徑至邉又作分角線至角成六小句股形則各角旁之兩線相等如丙戊丙庚兩線在丙角旁則相等乙庚乙己在乙角旁甲戊甲己在甲角旁並兩線相等其在正方角旁者甲戊甲己乃弦和較也于乙丙弦內分丙庚以對丙戊又分乙庚以對乙己則其餘為甲戊及甲己此即句股和與乙丙弦相較之數也然即為內容員徑何也各角旁兩線並自相等而正方角旁之兩線又皆與容員半徑等正方角旁兩小形之角皆平分方角之半則句股自相等而甲戊等心戊

甲己心己等然則弦和較者正方角旁兩線甲戊甲己之合即容員兩半徑心戊心己之合也故弦和較即容員徑也



試以甲戊為半徑作員則戊心亦半徑而其全徑癸甲戊與容員徑丁心己等以甲己為半徑作員則己心亦半徑而其全徑辛甲己與容員徑戊心壬亦等

三角容員第二術

以周與積求容員徑

内分二支

一句股形以弦和和為用亦可用半

一鋭角鈍角形以全周半周為用

假如甲乙丙句股形甲丙句一十六步甲乙股三十步乙丙弦三十四步求容員徑

術以句股相乘得數四百八十步為實併句股弦數共八十步為

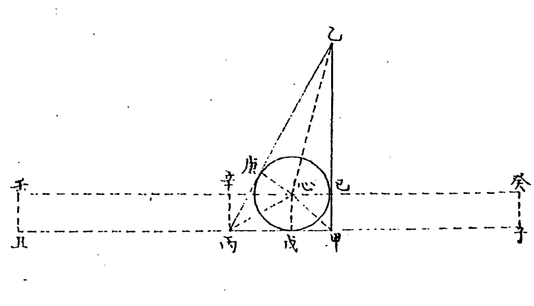
法除之得數倍之為容員徑

凡求得容員徑一十二步

解曰此以弦和和除句股倍積得容員半徑也

如圖從容員心作對角線分其形為三一甲心丙一甲心乙一丙心乙

乃於甲丙句線兩端各引長之截子甲如乙甲股截丙丑如丙乙弦則子丑線即弦和和也乃自員心作癸壬直線與丑子平行兩端各聯之成長方又作辛丙線分為三長方形其濶並如員半徑其長各如句如股如弦



而各為所分三小形之倍積甲辛長方如甲丙句之長而以心戊半徑為濶即為甲心丙形之倍甲癸長方如乙甲股之長而以同心巳之半徑為濶即為乙心甲形之倍丙壬長方如丙乙弦之長而以同心庚之半徑為濶即為乙心丙形之倍合之即為本形倍積與句股相乘同也句股相乘為倍積見求積條故以弦和和除句股相乘積得容員半徑

假如甲乙丙句股形甲丙句八十八尺甲乙股一百零五尺乙丙弦一百三十七尺求容員徑

術以句股相乘而半之得積四千六百二十尺為實併句股弦數而半之一百六十五尺為法除之得數倍之為容員徑

凡求得內容員徑五十六尺

解曰此以半周除句股形積而得容員半徑也半周即弦和和之半

如圖從容員心分本形為六小句股則同角之句股各

相等可以合之而各成小方形同甲角之兩句股成丁巳小方形同丙角之兩句股可合之成丁辛長方形以心辛丙形等丙戊心也同乙角之兩句股可合之成巳庚長方形以乙庚心形等心戊乙也乃移巳庚長方為辛癸長方則癸甲即同半周而癸巳大長方即為半周乘半徑而與句股積等也六小形之句皆原形之周變為長方則兩兩相得而各用其半是半周也癸甲及壬巳之長並半周壬癸及巳甲辛丙之間並同心丁是半周乘半徑也辛癸長方與巳庚等積即與乙角旁兩句股等積又丁辛長方與丙角旁兩句股等積再加丁巳形即與原設

乙甲丙句股形等積矣然則以句股相乘而半之者句股形積也

故以半周除之即容員半徑矣

或以弦和和除四倍積得容員全徑並同前論

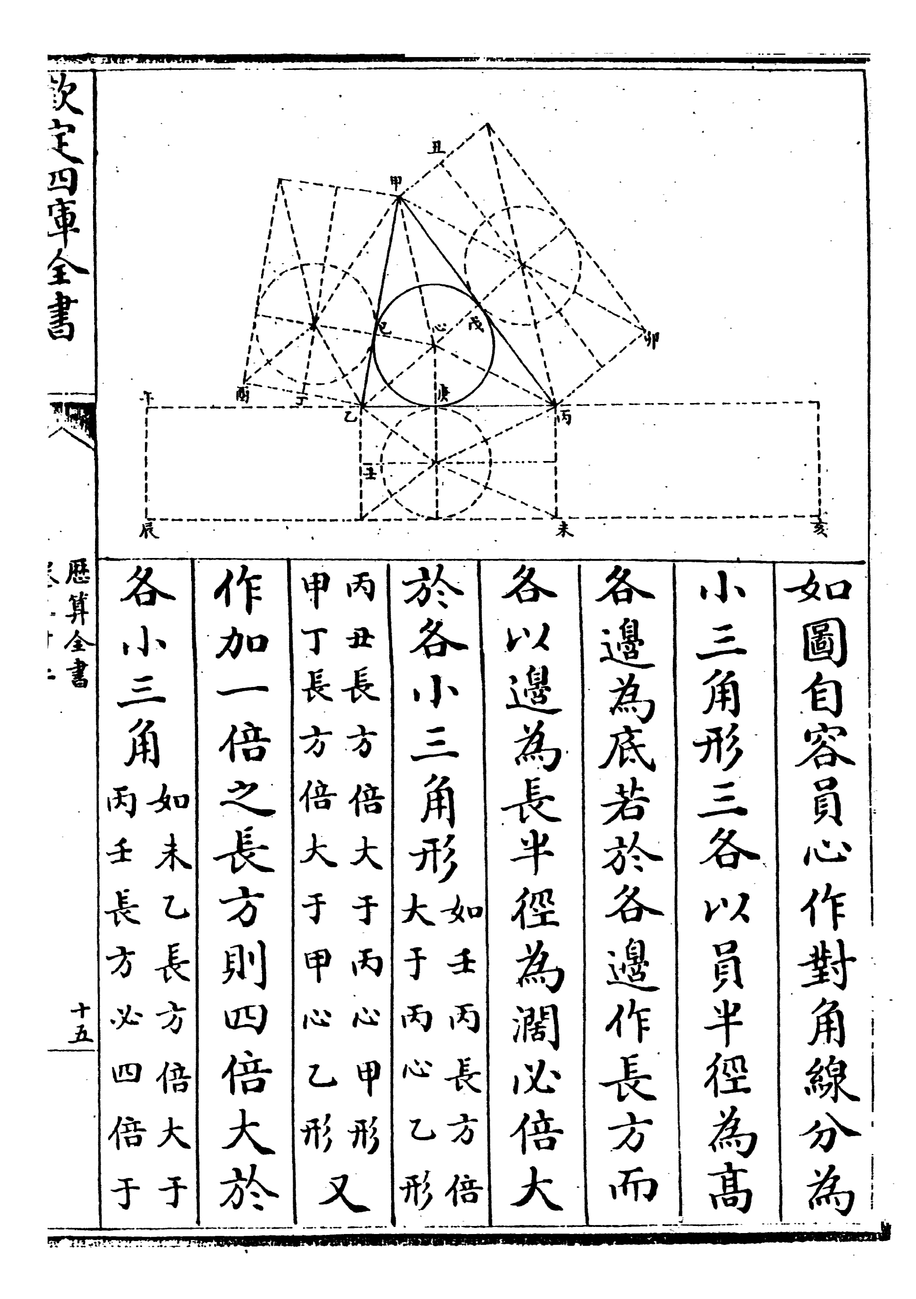
論曰句股形古法以弦和較為容員徑與弦和和互相乘除乃至精之理測員海鏡引伸其例以為測望之用其變甚多三角容員蓋從此出故為第一支

假如甲乙丙銳角形乙丙邊五十六尺甲丙邊七十五尺甲乙邊六十一尺求容員徑

術以乙丙邊為底求得甲丁中長線六十尺○法見求積以乘底得數三千三百六十尺倍之六千七百二十尺為實合計三邊共一百九十二尺為法除之得容員徑

凡求得內容員徑三十五尺

解曰此以全周除四倍積得容員徑也



如圖自容員心作對角線分為小三角形三各以員半徑為高各邊為底若於各邊作長方而各以邊為長半徑為濶必倍大於各小三角形如壬丙長方倍大于丙心乙形丙丑長方倍大于丙心甲形甲丁長方倍大于甲心乙形又作加一倍之長方則四倍大於各小三角如未乙長方倍大于丙壬長方必四倍于

丙心乙三角則卯甲亦四倍于丙心甲而甲酉亦四倍于甲心乙於是而通為一大長方移卯甲長方為亥丙移甲酉為乙辰則成亥午大長方形矣必四倍原形之羃而以三邊合數為長以容員之徑為濶然則以中長線乘底而倍之者正為積之四倍也以三邊除之豈不即得員徑乎

或以全周除倍積得容員半徑

或以半周除積得容員半徑並同

若鈍角形亦同上法

論曰銳角鈍角並以周為法此與句股形用弦和和同
但必先求中長線故為第二支

三角容員第三術

以中垂線為員半徑曰以量代算

假如甲乙丙三角形求容員徑既不用算故不言邊角之數

如求積術均分甲乙二角之度各作虛線交於巳即巳為容員之心次以巳為心儘一邊為界運規作員此員界必切三邊

於是從巳心向三邊各作十字垂線必俱在切員之點

而等為員半徑知半徑知全徑矣半徑各如巳庚線

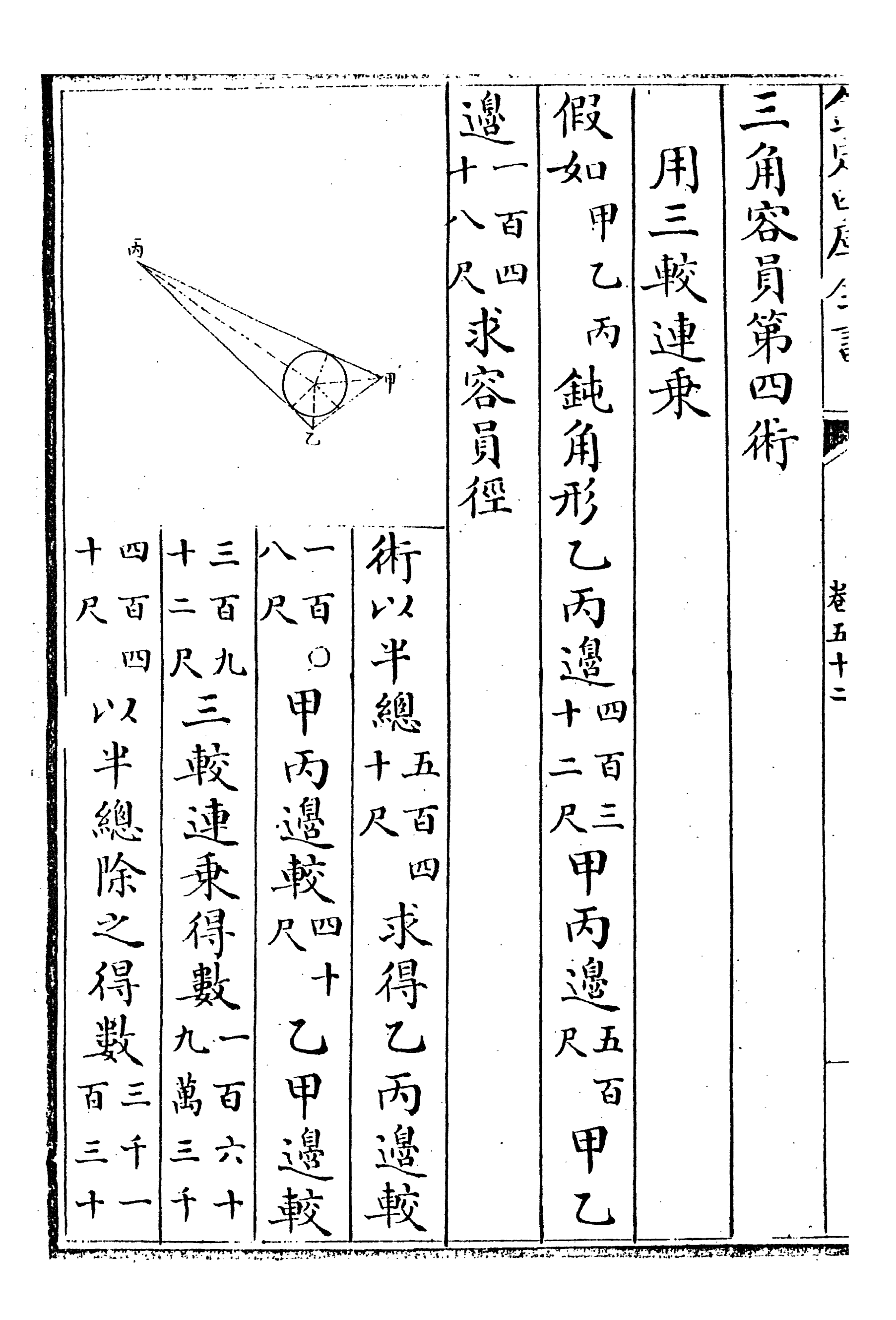
論曰此容員心即三角形之心故以容員半徑乘半總即得積也

又案此術亦句股及鋭鈍兩角通用

三角容員第四術

用三較連乘

假如甲乙丙鈍角形乙丙邊四百三十二尺甲丙邊五百尺甲乙邊一百四十八尺求容員徑



術以半總五百四十尺求得乙丙邊較一百〇八尺甲丙邊較四十尺乙甲邊較三百九十二尺三較連乘得數一百六十九萬三千四百四十尺以半總除之得數三千一百三十

六尺四因之一萬二千五百四十四尺為實平方開之得容員徑

凡求得內容員徑一百一十二尺

鈍角同法

解曰此所得者為容員徑上之自乘方冪故開方得徑

三角容方第一術

合底與髙除倍積得容方徑

內分二支

一句股形即以句股為底為髙即句股和也其容方依正方角

一三角形以一邊為底求其垂線為髙句股形以弦為底鋭角形三邊皆可為底鈍角形以大邊為底其容方並依為底之邊

假如甲乙丙句股形甲丙股三十六尺乙丙句一十八尺求容方

依正方角而以容方之一角切於弦

術以句股相乘得數六百四十八尺為實以句股和五十四尺為法除之得所求

求到內容方徑一十二尺

如圖作寅乙線與股平行作寅甲線與句平行成寅丙長方為句股形倍積

次引寅甲線橫出截之於癸引乙丙句橫出截之於夘使引出兩線

甲癸及丙卯皆如甲丙股仍作卯癸線聯之
乃從癸作斜線至乙割甲丙股於戊則戊丙為所求容
方之邊又從戊作申未橫線與上下兩線平行割甲乙
弦於巳則巳戊為所求容方之又一邊末從巳作午辛
立線割丙乙句於辛則巳辛及辛丙又為兩對邊而四
邊相等為句股形內所容之方

解曰寅卯大長方以癸乙斜線分兩句股則相等而寅
戊與戊卯兩長方等則寅丙長方與申卯長方亦等寅丙

內減寅戊而加相等之戊卯即成申卯夫寅丙者句股倍積而申卯者句股和乘容方徑也乙丙句丙卯股合之為申卯形之長申乙及未卯並同方徑為澗故以句股和除倍積得容方徑

又解曰寅丙長方分兩句股而等則寅戊與午丙兩長方等寅巳與巳丙既等則于寅戊內減寅巳而加相等之巳丙即成午丙而寅戊原等戊卯則午丙亦與戊卯等夫午丙形之丙甲與戊卯形之丙卯皆股也則兩形等積又等邊矣其長等其澗亦等甲丙與丙卯既等則辛丙與戊丙亦等而對邊悉等即成正方形

論曰此以句為底股為高也若以股為底句為高所得亦同其容方依正方角乃古法也三角以底濶合中長除積盖生於此是為第一術之第一支

假如甲乙丙句股形乙丙弦二十八尺其積一百六十八尺求容方依弦線而以容方之兩角切於句股

術以弦除倍積三百三十六尺得對角線一十二尺與弦相併四十尺為法倍積為實法除實得所求

求到容方徑八尺四寸

如圖作寅丑線與乙丙弦平行又作寅丙及丑乙與甲丁對角線平行成丑丙長方為句股形倍積

次引乙丙弦至夘引寅丑線至癸使癸丑及夘乙並同甲丁仍作癸夘線聯之

次從癸向丙作斜線割丑乙線於子遂從子作申未線與乙丙弦平行割甲乙股於庚割甲丙句於巳則庚巳

為容方之一邊末從庚作辰壬線從巳作午辛線並與甲丁平行而割乙丙弦於壬於辛則辛壬及庚壬及巳辛三線並與庚巳等而成正方

解曰寅子長方與子卯長方等積癸丙線分寅卯形為兩句股而等則兩句股內所作之方必等午壬長方又與寅子等寅丁形以甲丙線分為兩句股則寅巳與巳丁等又丑丁形以甲乙線分為兩句股則丑庚與丁庚等若移寅巳作巳丁移丑庚作丁庚則午丁等寅戊而辰丁等丑戊合之而午壬等寅子則午壬亦與子卯等而午壬之邊午辛及辰壬子卯之邊卯乙及未子並等甲丁對角線則兩形午壬子卯

等積又等邊矣其長等其濶亦等辰壬既等卯乙則辛壬亦等子乙而庚壬及巳辛亦不得不等故四線必俱等也

又解曰寅子既與子卯等則寅乙必與申卯等于寅乙内移寅子居子卯之位即成申卯而寅乙者倍積也申卯者底偕中長乘容方徑也乙丙弦也卯乙即甲丁對角中長線也合之為丙卯卯之長其兩端之濶申丙及未卯並同方徑

故合弦與對角線為法以除倍積得容方徑

論曰此以一邊為底中長線為高也既以一邊為底其容方即依此一邊而以兩方角切餘二邊也句股形故

以弦為底若鋭角形則任以一邊為底但依大邊則容方轉小亦如句股形依方角之容方必大於依弦線之容方也鈍角形但可以大邊為底其求之則皆一法也是為第一術之第二支

三角容方第二術

以圖算

內分二支

一以法截中長線得容方徑句股形即截其邊

一以法截兩斜邊得容方邊句股形即截其弦

假如鋭角形求容方任以一邊為底

如圖以乙丙最小邊為底先從對角甲作中長垂線至丁又從乙角作丑乙立線與甲丁平行而等乃從甲角

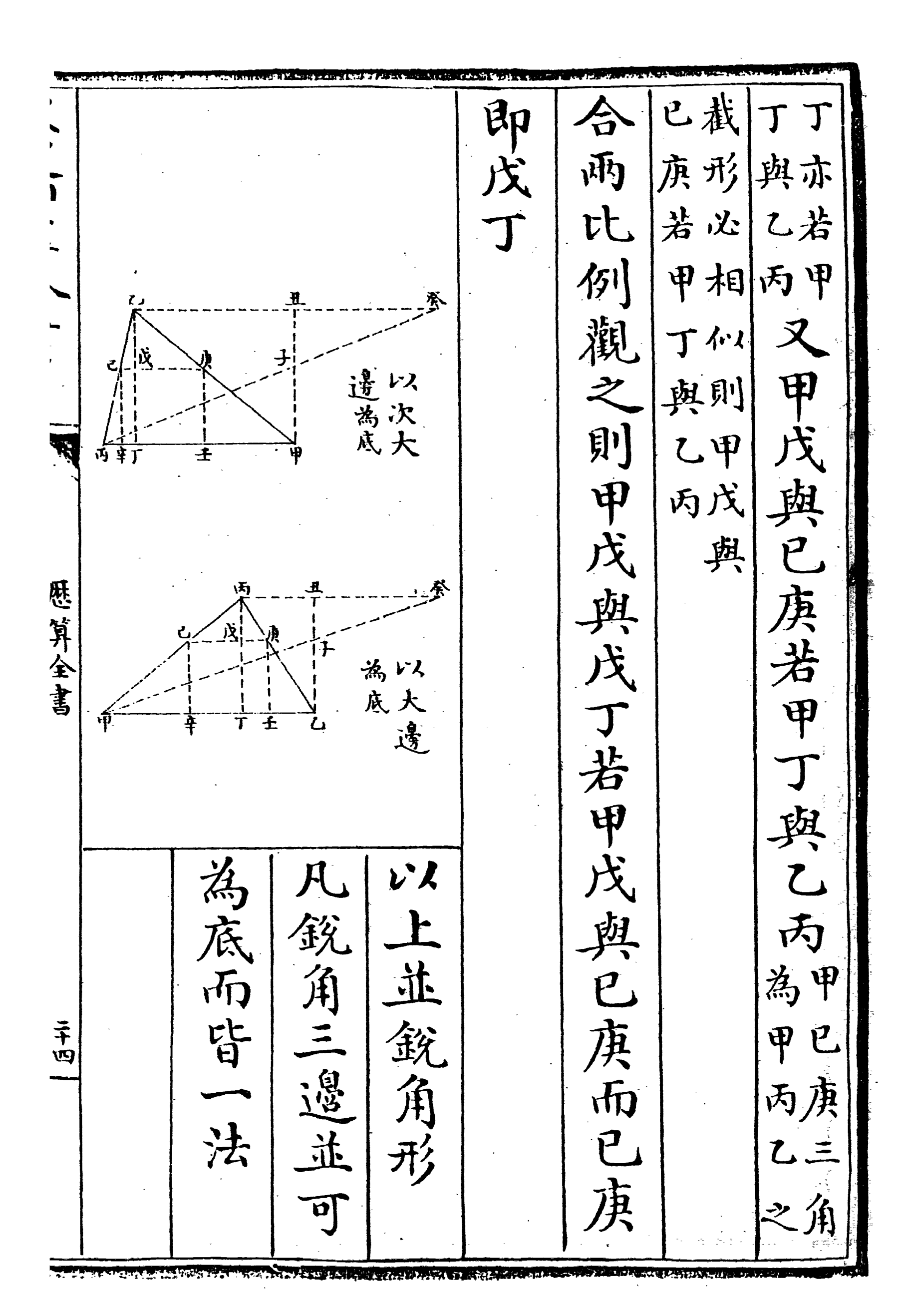
作橫線過丑至癸截丑癸亦如甲丁乃從癸向丙角作斜線割丑乙立線於子末以子乙之度截中長線甲丁垂線於戊即戊丁為容方之徑從戊作巳庚又從巳作線至辛從庚作線至壬成庚巳辛壬即所求

容方

解曰甲戊與戊丁若甲丁與乙丙子丑癸句股與子乙丙形有子交角必相似則丑子句與子乙句若丑癸股與乙丙股而丑子原與甲戊等子乙與戊丁等丑癸與甲丁等則甲戊與戊

丁亦若甲丁與乙丙又甲戊與已庚若甲丁與乙丙甲已庚三角為甲丙乙之截形必相似則甲戊與已庚若甲丁與乙丙

合兩比例觀之則甲戊與戊丁若甲戊與已庚而已庚即戊丁



以上並銳角形

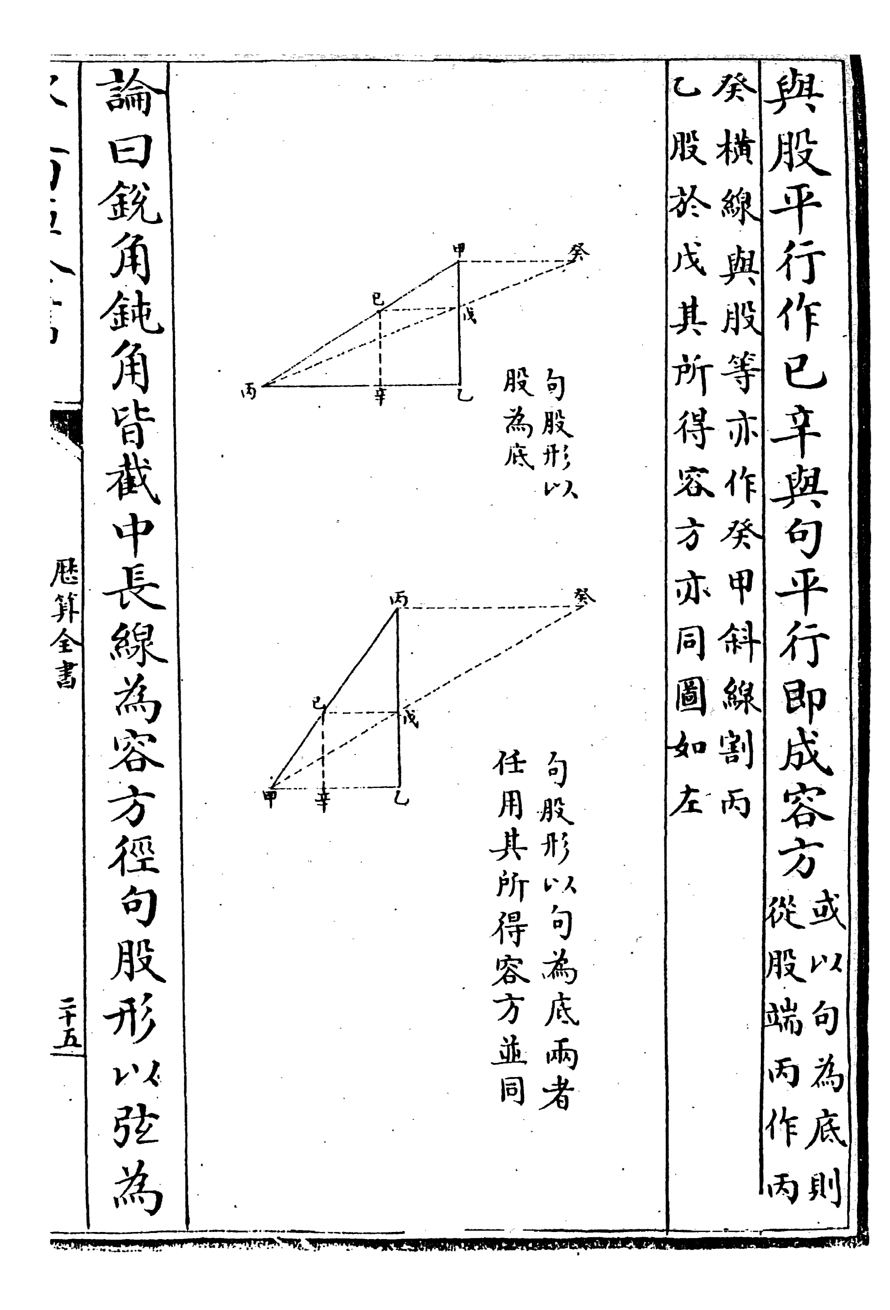
凡銳角三邊並可為底而皆一法

假如鈍角形求容方則惟有大邊可為底法同鋭角

假如句股形求容方以弦為底法亦同鈍鋭兩角

假如句股形求容方以股為底則於句端甲作横線與股平行而截之於癸使癸甲如甲乙句乃自癸向丙作斜線割甲乙句於戊則戊乙即容方之一邊末作巳戊

與股平行作巳辛與句平行即成容方或以句為底則從股端丙作丙癸橫線與股等亦作癸甲斜線割丙乙股於戊其所得容方亦同圖如左



句股形以股為底

句股形以句為底兩者任用其所得容方並同

論曰銳角鈍角皆截中長線為容方徑句股形以弦為

底亦然惟句股形以句為底即截其股為容方徑用股為底即截句不另求中長而與截中長之法並同是為第二術之第一支

假如乙丙丁三角求容方　依乙丙邊為底

如圖以乙丙底作正方形即甲乙丙戊方又作丁辛對角線次作甲辛及戊辛兩斜線割原形之兩斜線於巳於庚乃作巳庚線為所求容方之一邊　末作巳壬及庚癸兩線成小方形於形內即所求

解曰甲戊與巳庚若子辛與午辛也巳庚辛三角形為甲戊辛之切形則其橫與直之比例相等　而甲戊與子辛同為方徑而等則巳庚與

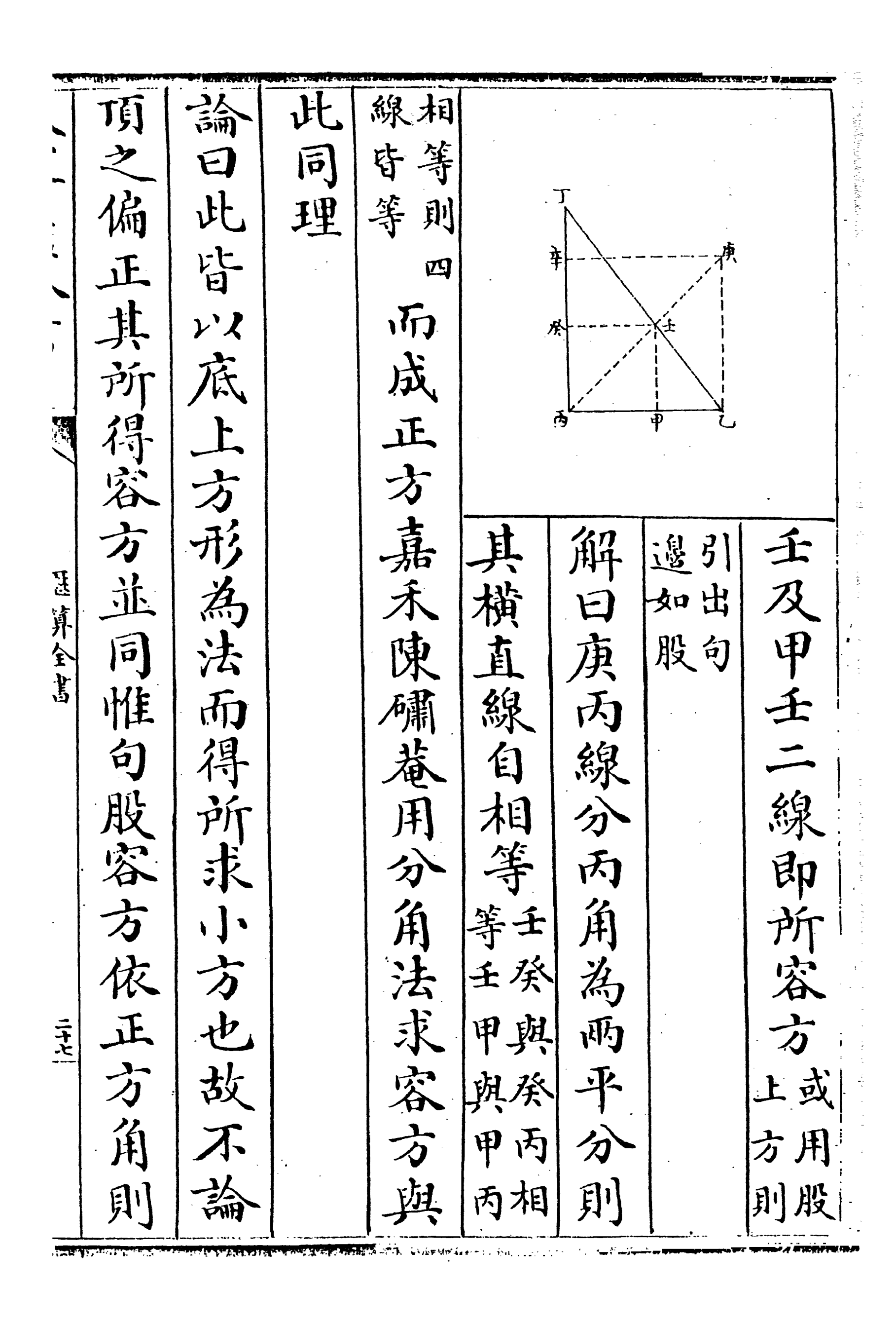
午辛亦同為小方徑而等

若底上方形大則其徑亦大於對角線則如第二圖引丁辛線至子其理亦同

有此二法則三邊並可為底

鈍角形用大邊為底句股形用弦為底並同第二圖

若句股形以句為底求容方如圖即用乙丙句作丙辛庚乙方形從方角庚向丙作斜線割丁乙弦於壬從壬作癸



壬及甲壬二線即所容方或用股上方則

引出句邊如股

解曰庚丙線分丙角為兩平分則其橫直線自相等壬癸與癸丙相等壬甲與甲丙相等則四線皆等而成正方嘉禾陳皭菴用分角法求容方與此同理

論曰此皆以底上方形為法而得所求小方也故不論頂之偏正其所得容方並同惟句股容方依正方角則

中長線與原邊合而為一法雖小異其用不殊是為第二術之第二支

三角形外切平員第一術

句股形以弦為徑

假如甲乙丙句股形乙丙弦長四尺五寸二分求外切員

術以弦折半取心得半徑二尺二寸六分其弦長四尺五寸二分即外切平員全徑以平員周率三五五乘之徑率一一三除之得員周一十四尺二寸

如圖乙丙員徑即句股形之弦折半於丁即員心也以

乙丁半徑為度從丁心運規作員必過甲而句股形之角皆切員周矣

論曰凡平員徑上從兩端各作直線至員周相會則成正方角如乙丙徑之兩端于丙于乙各作直線會于甲則甲角必為正角而為句股形假令兩線相遇于庚即成庚乙丙句股形于辛亦然以其皆正角故也故不問句股長短而並以其弦為外切員之徑

又論曰徑一百一十三而周三百五十五此鄭端清世子所述祖冲之術也（見律呂精義）按古率周三徑一李淳風等釋古九章以為術從簡易舉大綱而言之誠為通論諸家所傳徑五十周一百五十七則魏劉徽所改謂之徽率徑七周二十二則祖冲之所定謂之密率由今以觀冲之自有兩率（一為七與二十二一為一一三與三五五）蓋以其捷者為恒用之須而存其精者明測算之理亦可以觀古人之用心矣

三角形外切平員第二術

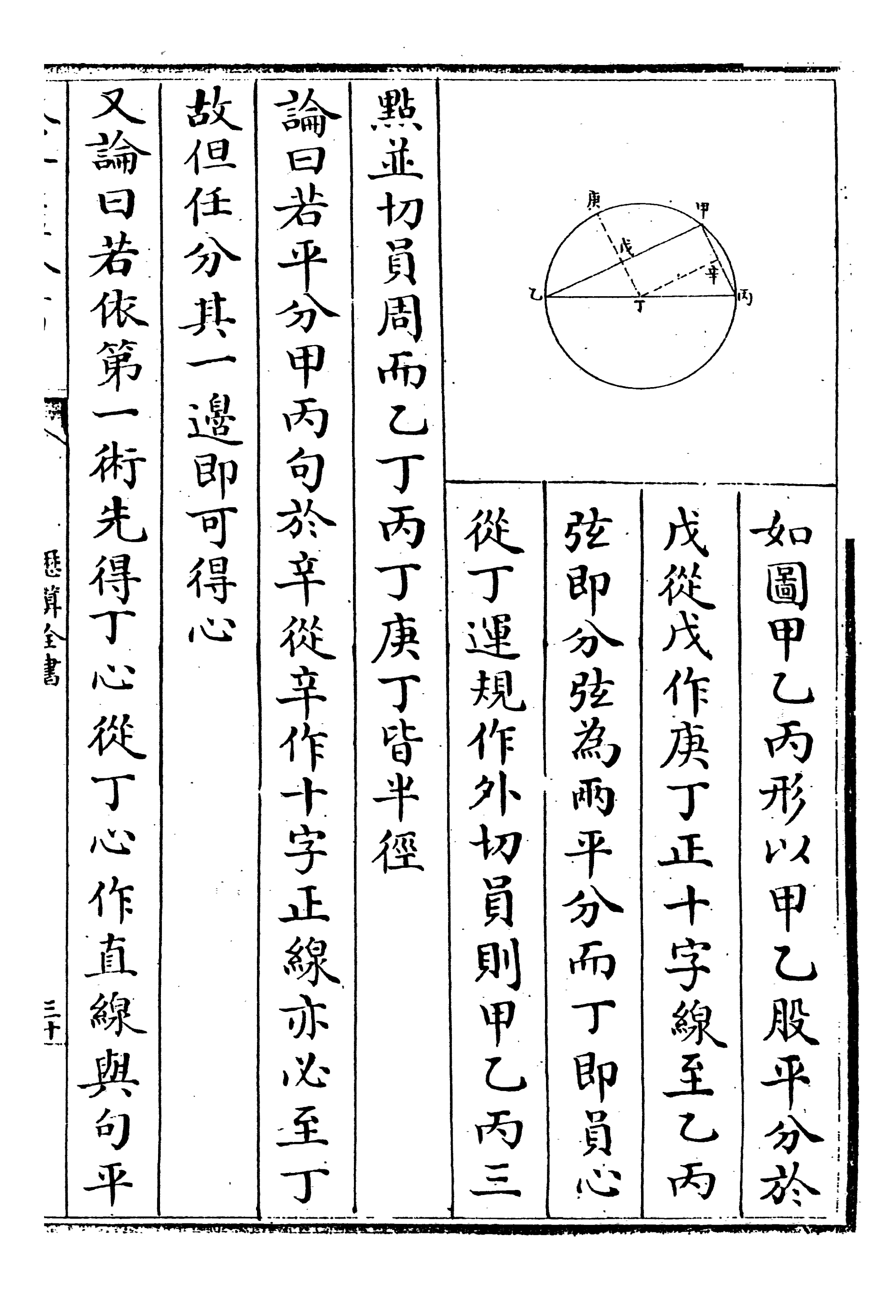
分邉取員心内分二支並以圖算

一句股形但分一邉即得員心其心在弦

一鋭角形鈍角形並分二邉可得員心鋭角形員心在形内鈍角形員心在形外

假如甲乙丙句股形求外切員

術任於句或股平分之作十字正線此線過弦線之點即為員心



如圖甲乙丙形以甲乙股平分於戊從戊作庚丁正十字線至乙丙弦即分弦為兩平分而丁即員心從丁運規作外切員則甲乙丙三點並切員周而乙丁丙丁庚丁皆半徑

論曰若平分甲丙句於辛從辛作十字正線亦必至丁故但任分其一邉即可得心

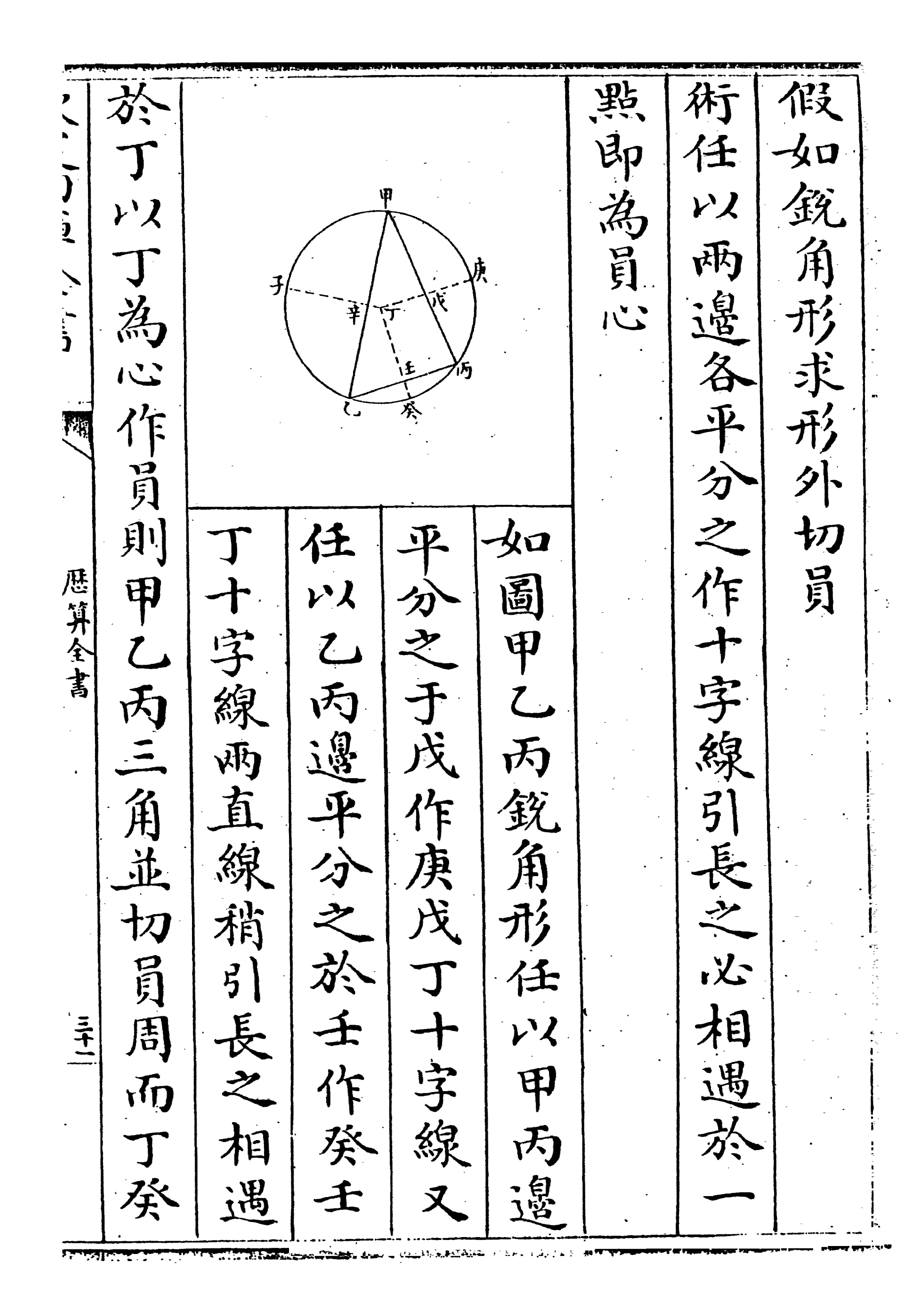
又論曰若依第一術先得丁心從丁心作直線與句平

行即此線能分股線為兩平分如丁庚線與甲丙句平行過甲乙股即平分股線于戊若與股平行而分句線亦然如丁辛線與甲乙股平行即分句線于辛

右句股形外切平員之心在弦線中央

假如鋭角形求形外切員

術任以兩邊各平分之作十字線引長之必相遇於一點即爲員心



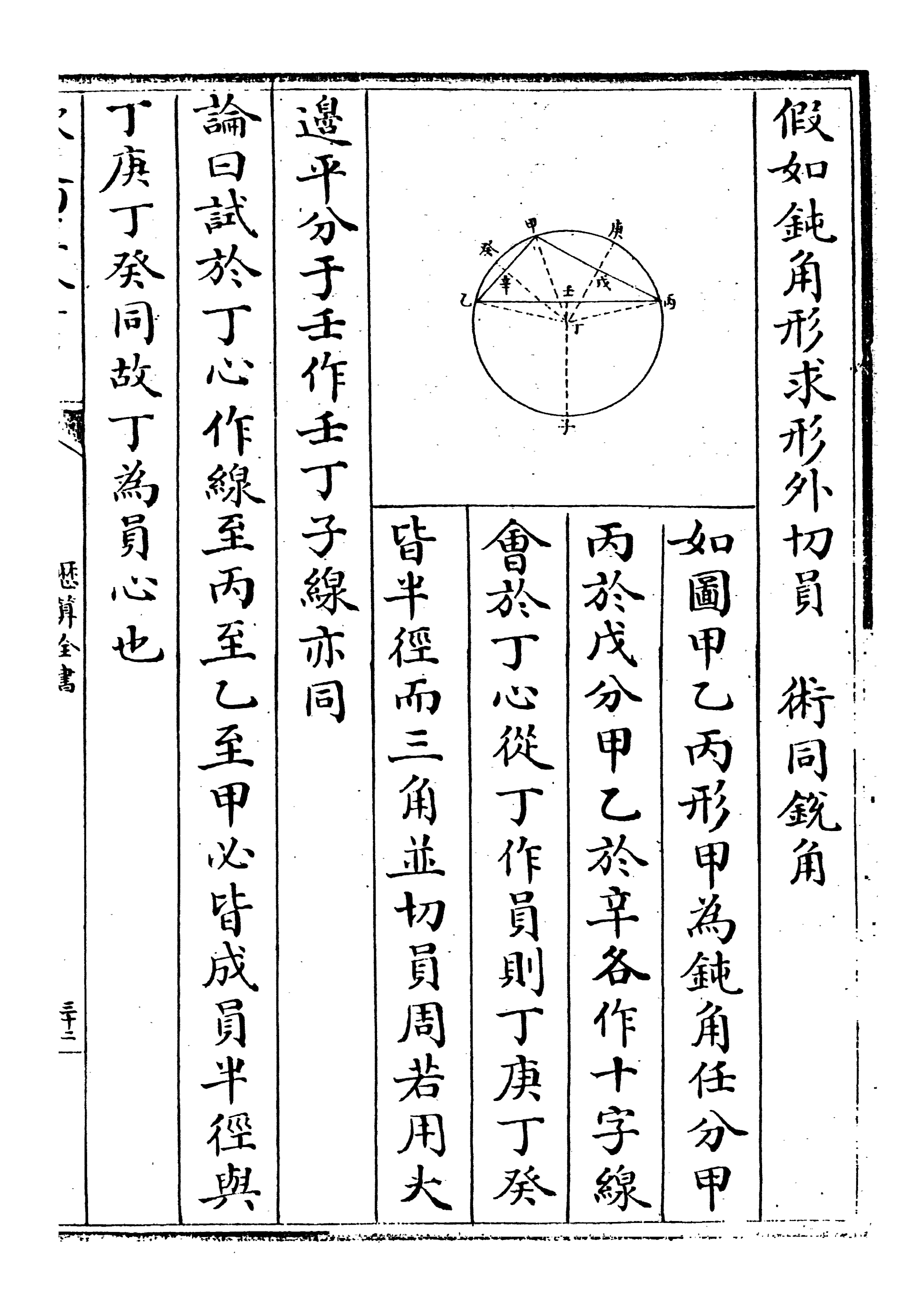
如圖甲乙丙鋭角形任以甲丙邊平分之于戊作庚戊丁十字線又任以乙丙邊平分之於壬作癸壬丁十字線兩直線稍引長之相遇於丁以丁爲心作員則甲乙丙三角並切員周而丁癸

丁庚皆半徑

論曰試於餘一邊再平分之作十字正線亦必會於此點故此點必圜心　如甲乙邊再平分之于辛作子辛丁十字線亦必相遇于丁點

右鋭角形外切平圜之心在形之內

假如鈍角形求形外切員　術同銳角



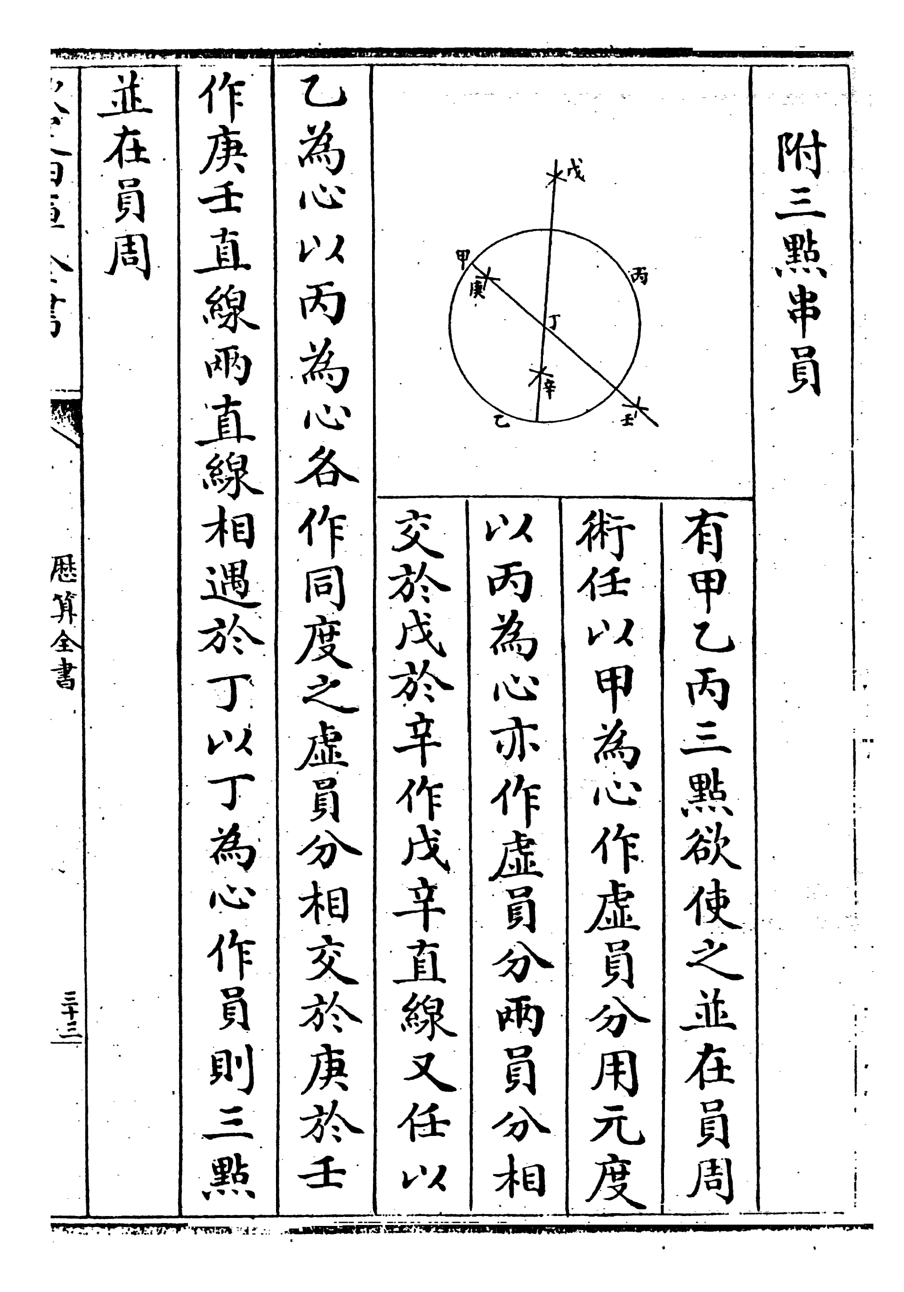
如圖甲乙丙形甲為鈍角任分甲丙於戊分甲乙於辛各作十字線會於丁心從丁作員則丁庚丁癸皆半徑而三角並切員周若用大邊平分于壬作壬丁子線亦同

論曰試於丁心作線至丙至乙至甲必皆成員半徑與丁庚丁癸同故丁為員心也

右鈍角形外切平員之心在形之外

總論曰此與容員之法不同何也內容員之心即三角形之心故其半徑皆與各邊為垂線而不能平分其邊然從心作線至角即能分各角為兩平分此分角求心之法所由以立也外切員之心非三角形之心其心或在形內或在形外距邊不等而能以十字線剖各邊為兩平分此分邊求心之法所由以立盖即三點串員之法也

附三點串員



有甲乙丙三點欲使之並在員周

術任以甲為心作虛員分用元度以丙為心亦作虛員分兩員分相交於戊於辛作戊辛直線又任以乙為心以丙為心各作同度之虛員分相交於庚於壬作庚壬直線兩直線相遇於丁以丁為心作員則三點並在員周

員周有三點不知其心亦用此法

歷算全書卷五十二